Université Nangui Abrogoua | République de Côte d'Ivoire

Licence 2 : MI - PC | Année Universitaire : 2020/2021

Examen d'Analyse 3 (Session 2)

ECUE : Intégrales généralisés et Séries de fonctions

Durée : 1 heure 15

Les calculatrices et les documents sont interdits. Les trois exercices sont indépendants.
Une attention particulière devra être apportée à la rédaction qui sera un élément important d'appréciation.

EXERCICE 1:

1 a Calculer une primitive de l'application $x \longmapsto \ln(1-x^2)$ puis justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(1-x^2)\mathrm{d}x$.

b En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(t)\ln(\sin(t))\mathrm{d}t$.

2 Déterminer la nature de la série ci-dessous, et en cas de convergence, calculer sa somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$$

1 a Calcul d'une primitive de l'application $x \longmapsto \ln(1-x^2)$. On cherche une primitive sur $]-1,1[$.

$$\int \ln(1-x^2)\mathrm{d}x = x\ln(1-x^2) + 2\int \frac{x^2}{1-x^2}\mathrm{d}x$$

$$\int \ln(1-x^2)\mathrm{d}x = x\ln(1-x^2) - 2\int \frac{1-x^2-1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$\int \ln(1-x^2)\mathrm{d}x = x\ln(1-x^2) - 2\int_0^x \mathrm{d}x + 2\int \frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x$$

$$\int \ln(1-x^2)\mathrm{d}x = x\ln(1-x^2) - 2x + \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + C \ ; \quad C \in \mathbb{R}.$$

Convergence de $\displaystyle\int_0^1 \ln(1-x^2)\mathrm{d}x$.

1 est la seule borne impropre et on a

$$\lim_{\substack{a\to 1\\ <}} \int_0^a \ln(1-x^2)\mathrm{d}x = \lim_{\substack{a\to 1\\ <}} \left[a\ln(1-a^2) - 2a + \ln\left(\frac{1+a}{1-a}\right)\right]$$

$$\lim_{\substack{a\to 1\\ <}} \int_0^a \ln(1-x^2)\mathrm{d}x = \lim_{\substack{a\to 1\\ <}} \left[-(1-a)\ln(1-a) + (a+1)\ln(1+a) - 2a\right]$$

$$\lim_{\substack{a\to 1\\ <}} \int_0^a \ln(1-x^2)\mathrm{d}x = -2 + 2\ln 2.$$

Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(1-x^2)\mathrm{d}x$ converge et $\displaystyle\int_0^1 \ln(1-x^2)\mathrm{d}x = -2+2\ln 2$

b Convergence et valeur de $\int_0^{\pi/2} \sin(t)\ln(\sin(t))dt$ Effectuant le changement de variable $x = \cos t$ dans $\int_0^1 \ln(1-x^2)dx$, on a :

$$x = 0 \Longrightarrow t = \frac{\pi}{2}\ ; \quad x = 1 \Longrightarrow t = 0\ ; \quad dx = -\sin t dt,$$

d'où

$$\int_0^1 \ln(1-x^2)dx = \int_{\pi/2}^0 \ln(1-\cos^2 t)(-\sin t)dt$$
$$\int_0^1 \ln(1-x^2)dx = \int_0^{\pi/2} \sin(t)\ln(\sin(t))dt.$$

Par conséquent l'intégrale $\int_0^{\pi/2} \sin(t)\ln(\sin(t))dt$ et $\int_0^{\pi/2} \sin(t)\ln(\sin(t))dt = -2 + 2\ln 2.$

(2) Convergence et calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$.

– Décomposons en éléments simples $\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$. On cherche deux réels a et b tels que pour tout $x > 0$, $\frac{1}{(3x+1)(3x+4)} = \frac{a}{3x+1} + \frac{b}{3x+4}$.

On a $a = \lim_{x\to -1/3} \frac{1}{3x+4} = \frac{1}{3}$ et $b = \lim_{x\to -4/3} \frac{1}{3x+1} = -\frac{1}{3}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+4}\right) = v_{n+1} - v_n$$

avec $v_n = -\frac{1/3}{3n+1}$. La série à étudier est telescopique, de plus $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1/3}{3n+1}\right) = 0.$

Donc la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} = \lim_{n\to+\infty} v_n - v_1 = \frac{1}{12}.$$

EXERCICE 2:

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : \begin{array}{rcl} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{x+n} \end{array}$

1 a Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $[0,1]$.

b Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[0,1]$.

2 Étudier la convergence simple puis uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[1,+\infty[$.

1 a Montrons que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $[0,1]$.
Soit $x \in [0,1]$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x}{x+n} = 0$. Donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $[0,1]$ ves la fonction nulle.

b Montrons que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[0,1]$.
Pour tout $x \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$|f_n(x) - 0| = |f_n(x)| = \frac{x}{x+n} \leq \frac{1}{n}.$$

Donc $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - 0| \leq \dfrac{1}{n}$; de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - 0| = 0$.
Ce qui signifie que a suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[0,1]$.

2 Étude de la convergence simple puis uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[1,+\infty[$.
Soit $x \in [1,+\infty[$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x}{x+n} = 0$. Donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $[1,+\infty[$ ves la fonction nulle.
Pour tout $n \geq 1$, on a $\sup\limits_{x\in[1,+\infty[} |f_n(x) - 0| \geq |f_n(n)| = \dfrac{1}{2}$. Par conséquent, si elle existe $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in[1,+\infty[} |f_n(x) - 0| \neq 0$. Ce qui prouve que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas uniformément sur $[1,+\infty[$.

EXERCICE 3:

Pour tout entier entier noturel n tel que $n \geq 2$, on considère la fonction

$$f_n : \begin{array}{ccc} [0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^n}{nx+\ln(n)} \end{array}$$

(1) Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 2} f_n$ converge simplement sur $[0,1[$.

(2) Soit $a \in]0,1[$. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 2} f_n$ converge uniformément sur $[0,a]$.

(3) (a) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Montrer que, $\sup\limits_{x\in[0,1[} \sum\limits_{k=n}^{2n} \dfrac{x^k}{kx+\ln(k)} \geq \dfrac{1}{4}$.

(b) La série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 2} f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0,1[$? Justifier.

(1) Montrons que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 2} f_n$ converge simplement sur $[0,1[$.

Pour tout $x \in [0,1[$ et pour tout $n \geq 2$, on a $0 \leq f_n(x) \leq \dfrac{1}{\ln(n)} x^n \leq \dfrac{1}{\ln(2)} x^n$. De plus comme $x \in [0,1[$, la série géométrique $\sum\limits_{n\geq 2} x^n$ converge, par conséquent $\sum\limits_{n\geq 2} f_n(x)$ converge.

Ce qui prouve que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 2} f_n$ converge simplement sur $[0,1[$.

(2) Soit $a \in]0,1[$. Montrons que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 2} f_n$ converge uniformément sur $[0,a]$.

Pour tout $x \in [0,a]$ et pour tout $n \geq 2$, on a $0 \leq f_n(x) \leq \dfrac{1}{\ln(2)} a^n$. Comme la série géométrique $\sum\limits_{n\geq 2} a^n$ converge, par conséquent $\sum\limits_{n\geq 2} f_n$ converge normalement donc uniformément sur $[0,a]$.

(3) (a) Soit $n \geq 2$. Montrons que, $\sup\limits_{x\in[0,1[} \sum\limits_{k=n}^{2n} \dfrac{x^k}{kx+\ln(k)} \geq \dfrac{1}{4}$.

Pour tout $x \in [0,1[$, on a $kx + \ln(k) < k + \ln(k) < 2k$ car $k > \ln(k)$. D'où $\dfrac{x^k}{kx+\ln(k)} > \dfrac{x^k}{2k}$. Par suite pour tout $x \in [0,1[$

$$\sum_{k=n}^{2n} \frac{x^k}{kx+\ln(k)} > \sum_{k=n}^{2n} \frac{x^k}{2k}$$

$$\sum_{k=n}^{2n} \frac{x^k}{kx+\ln(k)} > \sum_{k=n}^{2n} \frac{x^{2n}}{4n}$$

$$\sum_{k=n}^{2n} \frac{x^k}{kx+\ln(k)} > \frac{x^{2n}}{4n}(n+1)$$

$$\sum_{k=n}^{2n} \frac{x^k}{kx+\ln(k)} \geq \frac{1}{4} x^{2n}$$

Par suite
$$\sup_{x\in[0,1[}\sum_{k=n}^{2n}\frac{x^k}{kx+\ln(k)}\geq\frac{1}{4}\sup_{x\in[0,1[}x^{2n}=\frac{1}{4}.$$

b Convergence uniforme de la série de fonctions $\sum_{n\geq 2} f_n$ sur $[0,1[$:

Si la série convergeait uniformément sur $[0,1[$ alors le resteR_{n-1} d'ordre $n-1$ de la série de fonctions $\sum_{n\geq 2} f_n$ convergerait vers la fonction nulle sur $[0,1[$. Or

$$\sup_{x\in[0,1[}R_{n-1}=\sup_{x\in[0,1[}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{x^k}{kx+\ln(k)}\geq\sup_{x\in[0,1[}\sum_{k=n}^{2n}\frac{x^k}{kx+\ln(k)}\geq\frac{1}{4}.$$

On ne peut donc pas avoir $\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in[0,1[}R_{n-1}=0$, par conséquent la série de fonctions $\sum_{n\geq 2} f_n$ ne converge pas uniformément sur $[0,1[$.